Ehrhard's Thesis (1988)
chapter 4

$$\Theta \xrightarrow{\delta} \Delta \xrightarrow{\sigma} \Gamma \qquad M$$

$$\Theta \xrightarrow{\sigma\delta} M$$

$$M(\sigma\delta) \quad (M\sigma)\delta$$

Chapitre 4

Annexe

$$\Gamma \xrightarrow{[M]} \Gamma.A \xrightarrow{p} \Gamma \qquad p[M] = 1$$

$$N p[M] = N$$

4.1 Des combinateurs pour les Constructions

Un des résultats annexes de ce travail mené sur la sémantique des constructions est la définition d'un système de combinateurs "catégoriques", qui atomisent les opérations contextuelles (substitution et affaiblissement notamment). Ce genre de combinateurs n'est pas propre au calcul des constructions, mais pourrait aussi bien être utilisé pour n'importe quel formalisme avec types dépendants, ainsi que pour le λ-calcul non typé. Dans ce dernier cas, il se distingue des combinateurs de Curien (voir [10]) par l'absence des paires.

hd with $\Gamma.A$

On présente ces combinateurs dans le cas des Constructions. La syntaxe comporte trois sortes d'expressions : les expressions de types, de termes, et d'*opérateurs*, ce qui est nouveau.

- Les expressions de types :

  $A\gamma$ $\quad$ $A[\rho]$

  $$A := \mathrm{Prop} \mid \Pi A.B \mid \mathrm{T}(M) \mid \Phi(A) \qquad \sigma := 1 \mid p \mid [M] \mid \sigma^{+} \mid \sigma\sigma$$

  La dernière règle de formation est l'application d'un opérateur à un type. Cette règle est dans le *langage*, non dans le *méta-langage*.

- Les expressions de termes :

  $\sigma[\rho]$

  $$M := \star \mid MN \mid \lambda A.M \mid \forall A.M \mid \Phi(M)$$

  Le symbole $\star$ tient lieu de variable.

- Enfin, les expressions d'opérateurs :

  $$\Phi := \mathrm{Id} \mid \uparrow \mid (\leftarrow M) \mid \Phi^{\rightarrow} \mid \Phi \circ \Psi$$

Ces termes appellent plus de commentaires. On retrouve l'identité et la composition ; en ce sens, il s'agit de combinateurs catégoriques. L'opération $\uparrow$ correspond à l'affaiblissement. L'opération $(\leftarrow M)$ correspond à la substitution par M (pour la dernière variable du contexte), et l'opération $\Phi^{\rightarrow}$ est l'opération Φ, dont on a décalé l'action de 1 sur le contexte.

On donne à présent des règles de typage pour ces combinateurs, qui devraient permettre de mieux comprendre leur signification. Il faut d'abord dire ce qu'est un contexte :

$$\Gamma := () \mid \Gamma A$$

C'est donc simplement une liste de types. On introduit quatre formes de jugements. Les trois premières sont usuelles, la quatrième est nouvelle.

- $\Gamma \vdash$ exprime que Γ est un contexte bien formé.
- $\Gamma \vdash A$ exprime que A est un type bien formé dans le contexte Γ. .
- $\Gamma \vdash M : A$ exprime que M est un terme bien formé, de type A dans le contexte Γ.
- $\Gamma \vdash \Phi : \Delta$ exprime que Φ est un opérateur bien formé, qui transforme un jugement valide dans le contexte Δ en un jugement valide dans le contexte Γ.

On donne ensuite les règles d'inférence pour ces jugements.

- Règles pour les contextes

$$() \vdash \qquad\qquad 1 : \text{Context} \tag{39}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma A \vdash} \qquad\qquad \frac{A : \text{Fam}(\Gamma)}{\Gamma \# A : \text{Context}} \tag{40}$$

- Règles pour les types

$$\frac{\Gamma A \vdash B}{\Gamma \vdash \Pi A.B} \tag{41}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Prop}}{\Gamma \vdash \mathrm{T}(M)} \tag{42}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash \Phi : \Gamma}{\Delta \vdash \Phi(A)} \qquad\qquad \frac{A : \text{Fam}(\Gamma) \quad \varsigma : \Delta \to \Gamma}{A[\varsigma] : \text{Fam}(\Delta)} \tag{43}$$

Cette dernière règle explique comment "transporter" un type d'un contexte Γ dans un contexte Δ.

$$\frac{\sigma : \Delta \to \Gamma \quad \Gamma \vdash A}{\Delta \vdash A\sigma}$$

- Règles pour les termes

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma A \vdash \star : \uparrow(A)} \tag{44}$$

$$\frac{A : \mathrm{Fam}(\Gamma)}{q : \Gamma \# A \vdash A[p]}$$

$$\frac{\Gamma A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda A.M : \Pi A.B} \tag{45}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \Pi A.B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : (\leftarrow N)(B)} \tag{46}$$

$$\frac{\Gamma A \vdash M : \mathrm{Prop}}{\Gamma \vdash \forall A.M : \mathrm{Prop}} \tag{47}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Delta \vdash \Phi : \Gamma}{\Delta \vdash \Phi(M) : \Phi(A)} \tag{48}$$

$$\frac{a : \Gamma \vdash A \quad \rho : \Delta \to \Gamma}{a[\rho] : \Delta \vdash A[\rho]}$$

A nouveau, cette dernière règle explique le transport, mais cette fois pour les termes. Il faut bien sûr ajouter une règle sur l'égalité (qui est définie ci-dessous) :

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash B \quad A \sim B}{\Gamma \vdash M : B} \tag{49}$$

- Voici pour finir les règles qui sont vraiment nouvelles. Elles expliquent comment typer les opérateurs, avec des contextes. Cela revient à introduire dans la syntaxe des manipulations contextuelles qui d'habitude restent dans le méta-langage. Ecrivons d'abord les règles générales, qui portent sur l'identité et la composition :

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathrm{Id} : \Gamma} \tag{50}$$

$$\frac{\Gamma : \mathrm{Context}}{id : \Gamma \to \Gamma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi : \Gamma' \quad \Gamma' \vdash \Psi : \Gamma''}{\Gamma \vdash \Psi \circ \Phi : \Gamma''} \tag{51}$$

$$\rho' \circ \rho : \Gamma \to \Gamma''$$

comme cela se conçoit aisément, dans un cadre catégorique. Les deux règles suivantes typent l'affaiblissement et la substitution :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma A \vdash \uparrow : \Gamma} \tag{52}$$

$$\frac{A : \mathrm{Fam}(\Gamma)}{p : \Gamma \# A \to \Gamma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash (\leftarrow M) : \Gamma A} \tag{53}$$

$$\frac{a : \Gamma \vdash A}{\langle id, a \rangle : \Gamma \to \Gamma \# A}$$

Voici pour finir la règle sur le décalage des opérateurs :

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi : \Delta \quad \Delta \vdash A}{\Gamma\Phi(A) \vdash \Phi^{\rightarrow} : \Delta A} \tag{54}$$

$$\frac{\rho : \Gamma \to \Delta \quad A : \mathrm{Fam}(\Delta)}{\rho^{\to} : \Gamma \# A[\rho] \to \Delta \# A}$$

$$= \langle \rho \circ p, q \rangle$$

$$\Gamma \xrightarrow{[\pi]} \Gamma.A$$

Pour finir de présenter le formalisme, il reste à donner les équations qui portent sur les types, les termes et les opérateurs.

- On a d'une part, comme précédemment, l'équation de cohérence :

$$\mathrm{T}\,(\forall A.M) \sim \Pi A.\mathrm{T}\,(M) \tag{55}$$

Les équations suivantes expliquent comment faire rentrer les opérateurs dans les types :

$$\Phi\,(\mathrm{Prop}) \sim \mathrm{Prop} \tag{56}$$

$$\Phi\,(\Pi A.B) \sim \Pi\Phi\,(A).\Phi^{\rightarrow}\,(B) \tag{57}$$

car quand on traverse un lieur, il ne faut pas oublier de décaler l'action de l'opérateur, afin qu'il ne capture pas la variable liée.

$$\Phi\,(\mathrm{T}\,(M)) \sim \mathrm{T}\,(\Phi\,(M)) \tag{58}$$

bien évidemment. Il y a encore deux règles de nature purement catégorique :

$$\mathrm{Id}\,(A) \sim A \qquad A[id] \sim A \tag{59}$$

$$\Phi\,(\Psi\,(A)) \sim (\Psi \circ \Phi)\,(A) \qquad (A[s])[s'] \sim A[s \circ s'] \tag{60}$$

- Pour les termes, on a la β-conversion : $(\lambda A\, M)\, N = M[N]$

$$(\lambda A.M)N \sim (\leftarrow N)\,M \tag{61}$$

et bien sûr, la substitution est retardée. On écrit, pour mémoire, la η-règle :

$$\lambda A.(\uparrow(M)\star) \sim M \tag{62}$$

Puis, comme ci-dessus, il faut expliquer comment les opérateurs entrent dans les termes :

$$\Phi\,(MN) \sim \Phi\,(M)\Phi\,(N) \tag{63}$$

$$\Phi\,(\lambda A.M) \sim \lambda\Phi\,(A).\Phi^{\rightarrow}\,(M) \tag{64}$$

$$\Phi\,(\forall A.M) \sim \forall\Phi\,(A).\Phi^{\rightarrow}\,(M) \tag{65}$$

car tous deux sont des lieurs. Voici deux règles nouvelles. La première dit que la substitution appliquée à la variable donne le substituant :

$$(\leftarrow M)\,(\star) \sim M \qquad q[\langle id, a\rangle] \sim a \tag{66}$$

$q\,[M] = M$

$q\,\sigma^{+} = q$

$\rho^{\rightarrow} = \langle \rho \circ p, q \rangle$

et la seconde dit qu'un opérateur décalé est sans effet sur la variable :

$$\Phi^{\rightarrow}(\star) \sim \star \qquad q[\langle \rho\circ p, q\rangle] \sim q \tag{67}$$

Puis viennent les équations purement catégoriques :

$$\mathrm{Id}\,(M) \sim M \qquad \rho[id] \sim \rho \tag{68}$$

$$\Phi\,(\Psi\,(M)) \sim (\Psi \circ \Phi)\,(M) \tag{69}$$

$M(\Psi\circ\Phi)$
$(M\Psi)\Phi$

- Il faut, pour finir, quelques équations exprimant le comportement des morphismes les uns par rapport aux autres. Voici d'abord celles qui proviennent de la théorie générale des catégories :

$$\mathrm{Id} \circ \Phi \sim \Phi \qquad [M]p \tag{70}$$

$$\Phi \circ \mathrm{Id} \sim \Phi \qquad M = \langle 1, M\rangle \tag{71}$$

$$(\Phi_1 \circ \Phi_2) \circ \Phi_3 \sim \Phi_1 \circ (\Phi_2 \circ \Phi_3) \qquad \langle 1, M\rangle \tag{72}$$

La règle suivante dit que la succession d'un affaiblissement et d'une substitution est sans effet :

$p[M] = 1$

$$?\ (\leftarrow M) \circ \uparrow \sim \mathrm{Id} \qquad \langle id, a\rangle \circ p \sim id\ ? \tag{73}$$

On écrit aussi que l'opération de décalage des opérateurs est fonctoriel :

$$\mathrm{Id}^{\rightarrow} \sim \mathrm{Id} \qquad \langle id\circ p, q\rangle \sim id \tag{74}$$

$$(\Phi \circ \Psi)^{\rightarrow} \sim \Phi^{\rightarrow} \circ \Psi^{\rightarrow} \qquad \langle \rho\circ\rho'\circ p, q\rangle \sim \langle \rho\circ p, q\rangle \circ \langle \rho'\circ p, q\rangle \tag{75}$$

Et pour finir, voici des règles indiquant sous quelles condition il est possible "d'échanger" des opérateurs dans une compostion :

$$\Phi^{\rightarrow} \circ \uparrow \sim \uparrow \circ \Phi \qquad \langle \rho\circ p, q\rangle \circ p \sim p \circ \rho\ ? \tag{76}$$

$$\Phi \circ (\leftarrow M) \sim (\leftarrow \Phi\,(M)) \circ \Phi^{\rightarrow} \qquad \rho \circ \langle id, a\rangle \sim \langle id, a[\rho]\rangle \circ \langle \rho\circ p, q\rangle \tag{77}$$

Le formalisme est ainsi complètement décrit. On peut traduire cette nouvelle syntaxe dans l'ancienne, et réciproquement, et montrer que les systèmes de typage sont équivalents. C'est un travail plutôt pénible qu'on ne décrira pas ici.

L'interêt de ces combinateurs est surtout pratique, car, semble-t-il, ils modélisent bien la notion de contexte et de fermeture. La notion d'opérateur peut en effet être vue comme

$p\sigma^{+} = \sigma p$

$[M]\sigma$

$$\begin{tikzcd} \Delta.A_\sigma \arrow[r, "\sigma^+"] \arrow[dr, "p"'] & \Gamma.A \arrow[r, "p"] & \Gamma \\ & \Delta \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

une généralisation de celle de contexte, c'est-à-dire d'ensemble de liaison de valeurs à des variables. Le calcul décrit ci-dessus explique comment manipuler ces contextes, dans le cadre assez complexe de la dépendance de types. Un essai d'implémentation des constructions basé sur ces combinateurs est actuellement en cours, en collaboration avec Thierry Coquand.