Cette possibilité est liée au fait que le jugement $a \in A$ de NuPrl doit se lire comme un jugement de réalisabilité, en particulier on peut utiliser toutes les hypothèses "cachées" pour prouver ce jugement (ce qui correspond au fait pour nous que la proposition $\mathcal{R}(A, a)$ est de contenu nul). D'autre part le terme a dans le jugement $a \in A$ peut être a priori n'importe quel terme du λ-calcul pur. Ce jugement est donc très différent du jugement analogue des théories de Martin-Löf. Un résultat sémantique assure que si $a \in A$ est prouvable dans NuPrl alors a s'évalue en une forme canonique de A.

Dans la notion de réalisabilité que nous avons présentée jusqu'ici, nous sommes aussi restreints à ne réaliser les propositions que par des termes fortement normalisables. D'autre part le récurseur est essentiellement de même contenu que le prédicat récursif. On ne peut pas à la fois rendre de contenu nul le prédicat récursif et utiliser de manière calculatoire le récurseur.

On verra dans le chapitre suivant une nouvelle notion de réalisabilité qui permet de réaliser les propositions par des termes d'un langage qui contient des termes non normalisables.

4.6.3 Types récursifs dans le Calcul des Constructions

Nous esquissons la manière dont pourrait se faire l'introduction de types récursifs dans le Calcul des Constructions. Ce qui suit est une suggestion dûe à Th. Coquand.

Le Calcul des Constructions avec univers peut se voir comme l'ajout au système NuPrl d'un niveau des propositions sur lequel la quantification imprédicative est autorisée. Dans cette optique il paraît naturel d'introduire dans le calcul au niveau des types des constructions analogues à celles des sytèmes de Martin-löf. En particulier on peut introduire des types récursifs.

Supposons que l'on dispose au niveau des types d'une somme forte et d'une disjonction alors on a juste besoin d'un type récursif à un seul constructeur unaire. Nous supposons que la somme forte est notée $\Sigma_X P$ si X est de type *Type* et P de type $X \rightarrow Type$. On note *Fst* la première projection. Le langage contient pour l'introduction des types récursifs trois nouvelles règles de formation de termes.

$\mu_X.B$	avec X une variable qui est liée dans l'expression $\mu_X.B$ et B un terme.
in_C	avec C un terme.
Rec_C	avec C un terme.

Nous proposons les règles et axiomes suivants.

Formation : Si X apparaît positivement dans A alors :

$$\frac{\Gamma, X : Type \vdash A \in Type}{\Gamma \vdash \mu_X.A \in Type}$$

Introduction :

$$in_{\mu_X.A} \in A[X/\mu_X.A] \rightarrow \mu_X.A$$

Elimination :

$$\begin{array}{ll} Rec_{\mu_X.A} \in & (P : \mu_X.A \rightarrow Type) \\ & ((h : A[X/\Sigma_{\mu_X.A}P])(P\ (in_{\mu_X.A}\ (\Phi^{Fst}h)))) \\ & \rightarrow (x : \mu_X.A)(P\ x) \end{array}$$

On a la règle de réduction suivante :

$$(Rec_{\mu_X.A}\ P\ G\ (in_{\mu_X.A}\ t)) = (G\ (\Phi^{\phi}\ t))$$

avec $\phi = [z : \mu_X.A](z, (Rec_{\mu_X.A}\ P\ G\ z))$. On veut aussi faire des preuves par récurrence structurelle. C'est-à-dire que l'on veut un terme de type :

$$(P : \mu_X.A \rightarrow Prop)((h : A[X/\Sigma_{\mu_X.A}P])(P\ (in_{\mu_X.A}\ (\Phi^{Fst}h)))) \rightarrow (x : \mu_X.A)(P\ x)$$

On peut soit se donner un terme de ce type, soit l'obtenir à partir de $Rec_{\mu X.A}$ dans un système où on a de plus la règle :

$$\frac{A : Prop}{T(A) : Type}$$

Il reste à vérifier formellement que ce nouveau système est encore cohérent. Cette solution répond aux différents problèmes d'efficacité et de définitions récursives présentés précédemment. Son défaut majeur est qu'elle nécessite l'ajout de nouvelles constantes et règles de réduction au système et donc va à l'encontre de l'uniformité du système.